# Lineare Algebra II

## Eigenwerte und Eigenvektoren

**Def. Eigenvektor, Eigenwert**

**10.2 Satz**
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

*Beweis:* Annahme linear abhängig; mit einem weniger unabhängig. Anwenden des Endomorphismus, Widerspruch

**10.3 Def. charakteristisches Polynom**
det (X · E – A)

**10.4 Def. Eigenvektor, Eigenwert für Matrizen**

**10.5 Satz**
Das charakteristische Polynom ist ein normiertes Polynom vom Grad n.
$\lambda$ ist genau dann Eigenwert, wenn es Nullstelle des char. Polynoms ist.

*Beweis:* aus Definition klar – falls $\lambda$ Eigenwert, so ist $\lambda$ · E – A nicht invertierbar => Det Null => Nullstelle. Det Null => A – $\lambda$ · E nicht invertierbar => Abbildung injektiv => DimKern > 0 #

**10.6 Def. algebraisch abgeschlossen**

**10.7 Korollar**
Matrizen über algebraisch abgeschlossenen Körpern besitzen stets Eigenwerte.

## 11. Polynome über Körpern

**11.1 Def. Polynom, Koeffizienten, Leitkoeffizient, normiert, Menge der Polynome K[X]**

**11.2 Satz**
grad ( f + g ) $\leq$ max { grad f , grad g }
grad ( fg ) = grad f + grad g

*Beweis:* Nachrechnen (letzte Formel gilt bei Ringen nicht)

**11.3 Satz (Division mit Rest)**
Es gibt eindeutige Polynome q, r mit f = q g + r mit grad r < grad g.

*Beweis:* Eindeutigkeit über Annahme von zwei, Gradformeln. Existenz: Vollständige Induktion über grad f (Leitkoeffizient abziehen und dann Indvorraussetzung anwenden)

**11.4 Satz**
K[X] ist ein Hauptidealring (jedes Ideal wird von einem Element erzeugt). D.h. jedes Ideal hat die Form: $J = (f) = \{h \cdot f \mid h \in K[x]\}$.

*Beweis:* Sei f von minimalem grad und h im Ideal 11.3 anwenden, r im Ideal => r = 0.

**11.5 Satz**
Ist a eine Nullstelle von f, dann gibt es f = (X – a) g.

*Beweis:* Anwendung von 11.3 und einsetzen von a liefert r = 0.

**11.6 Def. Vielfachheit einer Nullstelle**

**11.7 Satz**

Sei f vom Grad n. Dann gibt es ein h mit $f = (X - a_1)^{e_1}(X - a_2)^{e_2} \dots (X - a_n)^{e_n} h$. Insbesondere gilt $e_1 + e_2 + \dots + e_n \leq n$ (Höchstens so viele Nullstellen wie Grad).
*Beweis:* Vollständige Induktion über n. Sukzessives Anwenden von Satz 11.5.

**11.8 Def. Ableitung auf Polynomring**

*Vorsicht:* Aus f' = 0 folgt nicht f ∈ K.

**11.9 Satz**

a ist einfache Nullstelle ⇔ f'(a) = 0

*Beweis:* f = (X – a) g. Einfache Nullstelle ⇔ g(a) = 0. Ableiten und einsetzten von a liefert dies.

**11.10 Def irreduzibel**

**11.11 Def Teiler eines Polynoms g | f ( g ein Teiler von f)**

**11.11 Satz**

Es sind äquivalent:

1. f ist irreduzibel
2. Aus f | ab folgt f | a oder f | b

*Beweis:* => 2. falsch liefert Widerspruch <= f reduzibell, also f = ab, Widerspruch, da grad a und grad b kleiner und da Teiler größer sein muss.

**11.13 Korollar**

Jedes normierte Polynom hat eine eindeutige Darstellung als Produkt irreduzibler normierter Faktoren.

*Beweis:* Existenz durch Aufspalten. Eindeutigkeit: Annahme zweier => Widerspruch

**11.14 Def. größte gemeinsame Teile, kleinstes gemeinsames Vielfache**

**11.15 Def. teilerfremd (ggT = 1)**

**11.16 Satz (Bézout)**

Es gibt r,s aus K[X] mit r f + s g = ggT ( f, g)
*Beweis:* (r f + s g) ist ein Ideal, nach 11.4 gibt es ein Erzeugendes normiertes Element, dies ist der ggT

**11.17 Lemma**

Sei f = q g + r eine Division mit Rest. Dann gilt ggT (f,g) = ggT ( g,r )

*Beweis:* Aus f = q g + r folgt ggT (f,g) / f-qg = r. => ggT (f,g) / ggT ( g,r ). Umgekehrt gilt ggT ( g,r ) / f => ggT ( g,r ) / ggT (f,g)

*Iterierte Anwendung von 11.17 liefert eine schnelle Methode zur Bestimmung größter gemeinsamer Teiler. Die Methode heißt euklidischer Algorithmus.*

**11.18 Bem:**

Ist a eine mehrfache Nullstelle von f, dann gilt f'(a) = 0, also (X – a) teilt f und f' => (X – a) / ggT(f,f')
Daher gilt: Sind f und f' teilerfremd, dann hat f keine mehrfachen Nullstellen.

## 12. Direkte Summen

**12.1 Def Direkte Summe**

**12.2 Satz**

Es sind äquivalent: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... U_m$ $U_i \cap W_i = \{0\}$

*Beweis:* a) => b) Annahme es gibt eins => Nullelement b) => a) Annahme es gibt zwei Darstellungen

**12.3 Def. $\alpha$ invariant**

**12.4 Satz**

Ist V endlichdimensional und eine direkte Summe α invarianter Unterräume. Dann ist die Zusammenfassung aller Basen der Unterräume eine Basis von V und die Matrixdarstellung von α ist eine Blockdiagonalmatrix zusammengesetzt aus den Matrizen der Unterraumabbildungen.
*Beweis:* Nachrechnen

**12.5 Def. Diagonalisierbar**

**12.6 Satz**

Das charakteristische Polynom habe n verschiedene Nullstellen in K. Dann ist α diagonalisierbar.

*Beweis:* Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Diese bilden also eine Basis und wegen $\alpha(v_i) = \lambda v_i$ wird α durch eine Diagonalmatrix beschrieben.

**Diagonalisierbarkeitskriterien**

Eine Matrix A ist diagonalisierbar, wenn
- A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist
- Es eine Basis aus Eigenvektoren gibt. Dann ist die Transformationsmatrix T = ($t_1$, $t_2$, … $t_n$)
- Das char. Polynom in verschiedene Linearfaktoren zerfällt (Siehe 12.6)
- Das Minimalpolynom in verschiedene Linearfaktoren zerfällt
- die algebraische Vielfachheit (wie oft Nullstelle des char. Poly.) jedes Eigenwertes gleich der geometrischen Vielfachheit (dim(Kern(A – λE)) ist.

## 13. Minimalpolynom

**13.1 Lemma**

Für einen endlichdimensionalen Vektorraum existiert ein annullierendes Polynom.
*Beweis:* Wegen dim(End(V)) = $n^2$ sind $n^2 + 1$ Endomorphismen linear abhängig.

**13.2 Def. Minimalpolynom**

**13.3 Lemma**

a) α invariante Unterräume von V sind f (α) invariant.
b) Bild (f(α)) und Kern(f(α)) sind α – invariant
c) Seim $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... U_m$ α-invarianter Unterräume dann gilt $Kern(f(\alpha)) = \bigoplus_{i=1}^{m}(U_i \cap Kern(f(\alpha))$
d) Kern f(α) $\subseteq$ Kern g(α) falls f/g
e) Kern f(α) $\cap$ Kern g(α) = Kern (ggT(f,g) (α)

*Beweis:* a) Linearkombinationen sind invariant b) α f(α) = f(α) α nachrechnen c) Darstellung der Null liefert eine Inklusion, andere klar. d) g = h f und nachrechnen. e ) eine Richtung folgt aus d andere über Bézout.

*Bemerkung:* Ein wichtiger Spezialfall von e) ist: f und g teilerfremd => Kern f(α) $\cap$ Kern g(α) = {0}

**13.4 Lemma**

Sei V endlichdimensional und p ein Teiler des Minimalpolynoms m mit 1 ≤ grad p < grad m. Setze $U := \frac{m}{p}(\alpha)(V) = Bild\left(\frac{m}{p}(\alpha)\right)$. Dann ist U ein α – invarianter Teilraum von V und p ist das Minpoly.

*Beweis:* Nach 13.3a) ist U α – invariant. p annulliert U, da pq = m V annulliert. Minipoly folgt daraus, dass $\tilde{p}$ ein Teiler von p sein muss. Andere Richtung durch m/ $\tilde{p}$ q da $\tilde{p}$ q annullierendes Pol. => p / $\tilde{p}$

**13.5 Korollar**

Sei V endlichdimensional. Sei m = pq mit ggT(p,q) = 1.

a) U = Kern p(α) = Bild q(α) , W = Kern q(α) = Bild p(α)
b) V = U $\oplus$ W
c) Primfaktorzerlegung vom m. Setze $U_i = Kern\, p_i^{e_i}(\alpha)$. Dann ist $V = \oplus U_i$, die $U_i$ sind α-invariant und $p_i^{e_i}$ ist das Minimalpolynom von $\alpha_{/U_i}$

*Beweis:* Wegen ggT gilt Kern $\cap$ Bild = $\{0\}$. Aus Bézout folgt V = U + W. Mit beidseitigen Inklusionen folgt a) und b) . c) per Induktion aus a) b) und 13.4

*Bemerkung:* Die Untersuchung von Endomorphismen ist also auf die Untersuchung von solchen Endomorphismen zurückgeführt, deren Minamalpolynom die Potenz eines irreduzieblen Polynoms ist.

**13.6 Def. α zyklisch**

**13.7 Bemerkung**

$< v >_\alpha$ ist der kleinste α invariante Unterraum von V, der v enthält

**13.8 Lemma**

Ist V α-zyklisch, so gilt dim V = grad m.
*Beweis:* komisch

**13.9 Lemma**

Ist m eine Primpotz $p^k$ mit p normiert und irreduzibel, dann existiert ein α-zyklischer Unterraum U ≤ V mit dim U = grad $p^k$. Insbesondere ist V α – zyklisch, falls grad $p^k$ = dim V.
*Beweis:* α-zyklischer Unterraum aus einem Vektor v $p^{k-1}(\alpha)(v) \neq 0$. Minimalpolynom hat Form $p^k$.

**13.10 Satz**

Es gilt grad m ≤ dim V.
*Beweis:* Durch vollständige Induktion (Fallunterscheidung V direkte Summe von U und W oder nicht)

**13.11 Lemma**

Hat m die Form $p^k$ und gilt dim V = grad $p^k$, dann ist V keine direkte Summe kleinerer α-invarianter Unterräume. Ferner gilt Kern $p^i$ (α) = Bild $p^{k-i}$ (α).
*Beweis:* lang

**13.12 Satz**

Sei V endlichdimensional und $p^k$ das Minimalpolynom von α. Zu jedem α – zyklischen Unterraum U mit dim U = grad $p^k$ gibt es ein α- invariantes Komplement W, d.h. V = U $\oplus$ W
*Beweis:* lang

**13.13 Def. α – unzerlegbar (keine direkte Summer zweier α-invarianter Unterräume)**

**13.14 Satz**

Sei m = $p^k$. Dann ist V genau dann α unzerlegbar, wenn grad $p^k$ = dim V. Sei V α unzerlegbar. Setze $U_i$ = Kern $p^i$ (α). Dann gilt dim $U_i$ = i grad p, und jeder α – invariante Unterraum ist einer der $U_i$
*Beweis:* lang

**13.15 Lemma (Zusammenfassung)**

α unzerlegbare Vektorräume V sind α zyklisch. Das Minimalpolynom eines sochen α ist eine Primpotenz $p^k$ mit grad $p^k$ = dim V

*Beweis:* Nach 13.5 ist m eine Primpotenz, nach 13.14 gilt dim V = grad m, und nach 13.9 ist V α-zyklisch.

**13.16 Lemma**

Dann ist V eine direkte Summe α unzerlegbarer Unterraume $U_i$. Sei m = $\prod p_i^{k_i}$. Setze $V_{p_i} = Kern\ p_i^{k_i}(\alpha)$. Dann gilt $V = \oplus V_{p_i}$ und jeder Unterraum ist eine direkte Summe gewisser $U_j$.
*Beweis:* Zerlegung von V in direkte Summe α-unzerlegbarer Unterräume. $V = \oplus V_{p_i}$ folgt aus 13.5. Minimalpolynome von U haben die form $p^l$ mit $l \le k_r$. Rest folgt mit 13.3 c)

Diese Zerlegung ist i.A. nicht eindeutig, allerdings sind die dabei auftretenden Dimensionen (und Minimalpolynome) eindeutig.

**13.17 Lemma**

Sei α ein Endomorphismus mit m = $p^k$ eine Primpotenz. Sei $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots U_m$ eine Zerlegung in α unzerlegbare Unterräume. Sei $p^{ki}$ das Minimalpolynom von $\alpha/_{U_i}$. Dann gilt dim $U_i = k_i$ grad p. Das Tupel $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ ist eindeutig bis auf Vertauschung. Ferner gilt $k_i = k$ für mindestens ein i.

*Beweis:* Wäre $k < k_i$ für alle i, dann wäre $p^k$ nicht mehr das Minpoly. dim $U_i = k_i$ grad p folgt aus α Unzerlegbarkeit. Rest unverständlich

**13.18 Lemma**

Sei V = $\langle v \rangle_\alpha$ mit Dimension n und $a_0 + a_1X + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ das Minimalpolynom von α. Dann Besitz α bezüglich der Basis v, α(v), $\alpha^2(v), \dots, \alpha^{n-1}(v)$ die Matrixdarstellung.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

*Beweis:* Für 1, bis n-1 Berechnung der Darstellungsmatrix direkt, für n aus dem Minimalpolynom.

**13.19 Def. Frobeniusmatrix (obige Matrix)**

Das Minimalpolynom einer Frobeniusmatrix ist $a_0 + a_1X + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

**13.20 Lemma**

Sei V ein α zyklischer Vektorraum, dann stimmen Minimalpolynom und das char. Polynom überein.

*Beweis:* Nach 13.18 genügt es das char. Polynom dieser Matrix auszurechen

**13.21 Satz (Frobeniusnormalform, rationale Normalform)**

Sei dim V < ∞ und α ein Endomorphismus und $m = p_1^{e_1} + p_2^{e_2} + \dots + p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung des Minimalpolynoms. Dann lässt sich α durch eine Blockmatrix $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$ beschreiben. Dabei sind die $A_j$ Frobeniusmatrizen zu Polynomen $p_i^{k_i}$ mir $1 \le k_i \le e_i$. Für alle i ($1 \le i \le r$) gehört mindestens ein $A_j$ zu $p_i^{e_i}$. Die Matrizen $A_j$ sind eindeutig bis auf Reihenfolge.

*Beweis:* Zusammenfassung bisheriger Ergebnisse
*Bemerkung:* A ist ähnlich zur Frobeniusnormalform

**13.22 Satz (Cayley – Hamilton)**

Es gilt $\chi_A(A) = 0$. Ferner ist jeder irred. Teiler des Minimalpolynoms.

*Beweis:* A ist ähnlich zu A' (Frobeniusnormalform). Jeder Teiler des Minimalpolynoms kommt unter den $\chi_{A_j}(X)$ vor => m / $\chi_A$

**13.24 Def. Jordanmatrix $J_{n,\lambda}$**

**13.25 Jordan-Normalform**

Sei dim V < $\infty$ und α ein Endomorphismus und $m = \prod (X - \lambda_i)^{e_i}$.

Dann wird α durch eine Blockdiagonalmatrix $\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$ beschreiben. Hierbei ist jedes $J_i$ eine Jordanmatrix. Die Anordnung ist bis auf Reihenfolge eindeutig. Für jedes i kommt unter den J's die Matrix $J_{e_i,\lambda_i}$ vor.

*Beweis:* Erst Frobeniusmatrix, dann zeigen der Ähnlichkeit zur Jordanmatrix.

## 14. Bilinearform

**14.1 Def. Bilinearform φ: V × V → K**

**14.2 Def. kongruent ( C' = $S^T$ C S )**

**14.3 Lemma**

Kongruenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation
*Beweis:* Nachrechnen

**14.4 Def. symmetrisch bzw. antisymmetrisch**

**14.5. Lemma**

Symmetrie bzw. Antisymmetrie ist invariant unter Kongruenz.
*Beweis:* $(S^TCS)^T = S^TC^T(S^T)^T = \pm S^TC^TS$

*Bemerkung:* Ist 0 $\neq$ 2, dann ist jede quadratische Matrix die Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix.

**14.6 Def. Bilinearform symmetrisch bzw. antisymmetrisch**

**14.7 Lemma**

φ ist genau dann symmetrisch bzw. antisymmetrisch, falls C symmetrisch bzw. antisymmetrisch ist.

**14.8 Def. Rang von φ = Rang von C, regulär = nicht ausgeartet**

Wohldefiniert, da Rang invariant unter Ähnlichkeit.
Eine Bilinearform heißt regulär (oder nicht ausgeartet), falls rang φ = dim V.

**14.9 Lemma**

Es sind äquivalent

(i) φ ist regulär ⇔ Darstellungsmatrix invertierbar
(ii) Aus φ(u,w) = 0 für alle u folgt w = 0
(iii) Aus φ(w,u) = 0 für alle u folgt w = 0

*Beweis:* o.E. rechnen mit Standardskalarprodukt i) => ii) aus Cw=0 folgt w=0 ii) => i) Sei C nicht invertierbar. Dann ex. w $\neq$ 0 mit Cw=0. i) ⇔ iii) fast analog man braucht C invertierbar ⇔ $C^T$ invertierbar

**14.10 Lemma**

Sei 0 ≠ 2 und φ (v,v) = 0 für alle v. Dann gilt φ = 0.

*Beweis:* 0 = φ (v+w,v+w) …

**14.11 Bemerkung**

Es gilt: Ist C eine Diagonalmatrix ⇔ $\varphi(w_i, w_j) = 0$ für alle $i \neq j$.

**14.12 Jacobi**

Sei 0 ≠ 2 und S eine symmetrische Matrix. Dann existiert eine invertierbare Matrix W und eine Diagonalmatrix D mit $W^TSW=D$.

*Beweis:* Per Induktion. Ein Vektor ≠ 0. Daraus Basis Rest verändern, bis Bedingung 14.11 erfüllt. Für dieses Teil erfüllt. Induktionsannahme.

**14.13 Satz (Trägheitssatz von Sylvester)**

Sei $S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, dann existiert eine invertierbare Matrix W mit

$$W^TSW = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && \ddots &&&&&& \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& -1 &&&& \\ &&&&& \ddots &&& \\ &&&&&& -1 && \\ &&&&&&& 0 & \\ &&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} t \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r-t \end{matrix}$$

t Hängt nur von S ab

r – t r = rang S

*Beweis:* Teilen der Diagonalmatrix aus 14.11 durch die jeweiligen Werte. T von Konstruktion unabhängig durch Widerspruch.

Ist $S \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ so sind alle –1 auch 1.

**14.14 Def. positiv definit**

Eine positiv definite Bilinearform ist nicht ausgeartet.

**14.15 Def. Skalarprodukt oder inneres Produkt / euklidischer Raum / Betrag, Norm, Länge**

**14.16 Bemerkung**

Auf $V = K^n$ und durch $\varphi(v,w) = v^Tw$ ist das Standardskalarprodukt definiert. In diesem Fall stimmt | v | mit der gewöhnlichen Länge überein.

**14.17 Def. hermitesche Form / positiv definit / unitärer Raum**

Hermitesche Formen sind weder bilinear noch symmetrisch.

**14.18 Bemerkung**

Weitere Eigenschaften, linear in der zweiten Komponente, Konjugierung bei herausziehen eines Skalars aus 2. Komponente

**14.19 Def. hermitesch / Adjungierte Matrix** $\overline{C}^T = C^* = C$

**14.20 Def. komplex kongruent** $B = M^* AM$

**14.21 Bemerkung**

Komplexe Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation, die verträglich ist mit den hermiteschen Eigenschaften.

**14.22 Bemerkung**

Hermitesche Form: $\varphi(v,w)=\alpha^T C\beta$ mit $v=\sum\alpha_i v_i$ und $w=\sum\beta_i v_i$

**14.23 Bemerkung**
C und C' beschreiben gleiche hermitesche Formen auf V bzgl. geeigneter Basen, genau dann wenn sie komplex kongruent sind.

**14.24 Def. Lemma Komplexifizierung eines Vektorraums**

**14.25 Lemma**
Sei V ein reeller Vektorraum. Dann ist jede Basis von V eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$, insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{R}} V=\dim_{\mathbb{C}} V$.

*Beweis:* Komplexe Linearkombination → Erzeugendensystem. Lineare Unabhängigkeit folgt aus Summendarstellung der Null.

**14.29 Satz (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)**
In euklidischen oder unitären Vektorräumen gilt: $|vw| \leq |v| \cdot |w|$

*Beweis:* o.E. V unitär (sonst Betrachtung der Komplexifizierung). Folge der positiven Definitheit.

**14.30 Korollar**
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$

**14.31 Satz**
Positive Definitheit, Linearität, Dreiecksungleichung

*Beweis:* Nachrechnen

**14.32 Def. normiert**

**14.33 Def. Winkel / senkrecht oder orthogonal**
$$\cos\varphi=\frac{vw}{|v||w|}$$
Existiert wegen Cauchy-Schwarz immer.

**14.34 Orthogonalsystem / Orthonormalsystem / Orthogonalbasis / Orthonormalbasis**

**14.35 Satz**
Orthogonalsysteme sind linear unabhängig.

*Beweis:* Annahme Summe Null, Multiplikation mit $v_j$ => $a_j = 0$

Die Darstellungsmatrix ist genau dann eine Einheitsmatrix, wenn es eine Orthonormalbasis ist.

Aus dem Trägheitssatz von Sylvester folgt, dass jeder endlichdimensionale euklidische Raum eine Orthonormalbasis besitzt. Das entsprechende gilt für unitäre Räume.

**14.36 Satz (Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt)**
Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum endlicher Dimension. Dann lässt sich jedes Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis fortsetzten. Insbesondere existieren stets Orthonormalbasen.

*Beweis:* Orthonormalisierungsverfahren. Beweis per vollst. Induktion

**14.37 Def. orthogonale Mengen / orthogonale Komplement** $M^{\perp}$

**14.38 Lemma**

a) $N^{\perp} \subseteq M^{\perp} \quad falls \quad M \subseteq N$
b) $M^{\perp} = <M>^{\perp}$
c) $M^{\perp} = N^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad <N>^{\perp} = <M>^{\perp}$

*Beweis:* a) gilt für jedes $v \in N^{\perp}$ b) eine Inklusion folgt aus a) und $M \subseteq <M>$ außerdem folgt aus $M \perp M^{\perp} \quad <M> \perp M^{\perp}$ c) folgt aus Letzterem

**14.39 Satz**

Sei V ein eukl. oder unitärer Raum endlicher Dimension. Sei U ein Unterraum von V.

a) $V = U \oplus U^{\perp}$
b) $(U^{\perp})^{\perp} = U$

*Beweis:* a) Orthonormalbasis von U zu einer von V erweitern. Schnitt Null. b) Folgt aus a) und gleicher Dimension und enthalten.

## 15. Adjungierte und normale Endomorphismen

**15.1 Def. adjungiert**

$\alpha(v) w = v \; \alpha^{*}(w)$

**15.2 Satz**

Zu α gibt es höchstens einen adjungierten Endomorphismus $\alpha^*$. Für $\dim V < \infty$ existieren stets Adjungierte.

*Beweis:* Eindeutigkeit + wählen eines Adjungierten

**15.3 Satz**

Es gilt $\alpha^{**} = \alpha$.

**15.4 Satz**

Existieren $\alpha^*$ und $\beta^*$, so auch $(\alpha\beta)^*$ und es gilt $(\alpha\beta)^* = \beta^* \alpha^*$.

**15.5 Satz**

Es gilt $Kern \; \alpha^{*} = \left(Bild \; \alpha\right)^{\perp}$. Für $\dim V < \infty$ auch $V = Bild \; \alpha \oplus Kern \; \alpha^{*} \quad V = Bild \; \alpha^{*} \oplus Kern \; \alpha$

*Beweis:* Multiplikation mit v.

**15.6 Def. normal**

$\alpha \alpha^* = \alpha^* \alpha$

**15.7 Lemma**

Sei α normal, dann gilt $\alpha(v) \alpha(w) = \alpha^*(v) \alpha^*(w)$.

*Beweis:* Nachrechnen

**15.8 Satz**

Sei α normal. Dann haben α und $\alpha^*$ die gleichen Eigenvektoren. Ist v ein Eigenvektor von α mit Eigenwert λ, dann ist v ein Eigenvektor von $\alpha^*$ mit Eigenwert $\overline{\lambda}$. Eigenvektoren von α zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

*Beweis:* $|\alpha(v)-\lambda v|^2 = \ldots\ |\alpha^*(v)-\overline{\lambda}\,v|^2$ ; Skalarprodukt null.

**Satz 15.9**
Es sei α = α*. Dann sind die Eigenwerte von α reell.

*Beweis:* o.E. V unitär. Nach 15.8 ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von $\alpha^*$ mit Eigenvektor v.

**15.10 Lemma**

Sei V endlichdimensional, α normal. Sei U ein α-invarianter Unterraum von V. Dann ist $U^\perp$ $\alpha^*$ invariant. Ist auch $U^\perp$ α invariant, dann ist U $\alpha^*$ invariant und es gilt $\left(a_{/U}\right)^* = \left(a^*\right)_{/U}$. Insbesondere ist $a_{/U}$ normal.

*Beweis:* uw = 0 => α(u)w=0 => u $\alpha^*$(w)=0. Rest analog.

**15.11 Lemma**

Sei V endlichdimensional, α normal und v ein Eigenvektor von α. Dann ist W = $v^\perp$ α-invariant und $a_{/w}$ ist normal.

*Beweis:* Folgt aus 15.10.

**15.12 Satz (Spektralsatz, komplex)**
Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Raum, und α ein Endomorphismus. Dann ist α genau dann normal, wenn es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von α gibt.

*Beweis:* <= Herleitung der Darstellung von $\alpha^*$ und dann beweis Normalität. => Vollständige Induktion, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen mit 15.11.

**15.13 Lemma**

Sei $\hat{\alpha}$ die komplexe Fortsetzung eines Endomorphismus α eines Euklidischen Vektorraums V. Dann gilt $\widehat{a^*} = \hat{\alpha}^*$ und $\hat{\alpha}$ ist normal. Sei v ein Eigenvektor von $\hat{\alpha}$ mit Eigenwert $\lambda \notin \mathbb{R}$, dann ist $\overline{v}$ ein Eigenvektor von $\hat{\alpha}$ mit Eigenwert $\overline{\lambda}$. Insbesondere sind v und $\overline{v}$ orthogonal. Ferner ist $\overline{v}$ normiert, falls v normiert ist.

*Beweis:* Formulierung von $\hat{\alpha}(v_1 + iv_2) = \alpha(v_1) + i\alpha(v_2)$. Dann alles nachrechnen.

**15.14 Satz (Spektralsatz, reell)**
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Raum und α ein normaler Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis, bzgl. der α durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_m &&&&&& \\ &&& a_1 & b_1 &&&& \\ &&& -b_1 & a_1 &&&& \\ &&&&& \ddots &&& \\ &&&&&& a_r & b_r \\ &&&&&& -b_r & a_r \end{pmatrix}$$
beschrieben wird.

*Beweis:* Mittels Vollständiger Induktion über dim V α reelle und nicht reelle Eigenwerte getrennt.

**15.15 Korollar**
Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Raum und α selbstadjungiert d.h. α = $\alpha^*$. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von α.

*Beweis:* Folgt aus 15.14 mit C = $C^T$

## 16. Orthogonale und unitäre Endomorphismen

### 16.1 Def orthogonal bzw. unitär

$\alpha(v)\alpha(w) = vw$

### 16.2 Lemma

Orthogonale und unitäre Endomorphismen sind injektiv. Für dim V < $\infty$ gilt:
O(V) und U (V) sind Untergruppen von Gl(V)

*Beweis:* Kern α = {0}, prüfen der Eigenschaften

### 16.3 Lemma

Sei V euklidisch und α orthogonal, dann ist die Komplexifizierung $\hat{\alpha}$ unitär.

*Beweis:* Nachrechnen zusammen mit 16.4. iii

### 16.4 Satz

Sei V eukl. oder unitär und α ein Endomorphismus. Dann sind äquivalent:

(i) α ist orthogonal bzw. unitär
(ii) Aus |v| = 1 folgt |α(v)|=1
(iii) |α(v)| = |v|
(iv) Bilder unter α von Orthonormalsystemen sidn Orthonormalsystemen

*Beweis:* i)=>ii) und iii) klar iii)=>i) Auflösen und Realteil abschätzen i)=>iv) klar iv)=>ii) klar

### 16.5 Lemma

Sei V euklidisch oder unitär mit dim V < $\infty$. Dann gilt $\alpha^*\alpha = 1$ genau dann wen α orthogonal bzw. unitär ist.

*Beweis:* Auf Def. α* anwenden.

### 16.6 Def. orthogonal (Matrix)

$A^{\perp}A = E \quad bzw. \quad A^{*}A = E$